RMA1 – dú 2 – řešení (Píšu řešení i s „výkladem", vysvětlením, pokud to někdo nepotřebuje, my můžete psát dú „stručně")

(1.) Obecné řešení rovnice:

a) $y'' - 2y' + 3y = 0$ – řešení hledáme ve tvaru $y = e^{\lambda x}$ a pro λ dostáváme tzv. charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

řešení: $\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm i\sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}\,i$ (vlastní čísla)

a fundamentální systém řešení je tedy

$$y_1(x) = e^x \cos\sqrt{2}x \;,\quad y_2(x) = e^x \sin\sqrt{2}x$$

a obecné řešení je

$$y_H(x) = e^x(c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\sin\sqrt{2}x),\quad c_1, c_2 \in R,\ x \in R$$

b) $y'' - 4y' + 13y = 0$ – již stručně – návod jako v a)

$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ – charakteristická rovnice (naší dif. rovnice)

řešení: $\lambda_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{|16-52|}}{2} = 2 \pm 3i$

tedy, fundamentální systém řešení je

$$y_1(x) = e^{2x}\cos 3x \,,\quad y_2(x) = e^{2x}\sin 3x$$

a obecné řešení dané rovnice:

$$y_H(x) = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x) \;,\ x \in R,\ c_1, c_2 \in R$$

Poznámka: příklady a), b) lze řešit též užitím komplexní exponenciely, bude ukázáno a vysvětleno „zvlášť".

c) $y'' + 6y' + 9y = 0$

$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ – charakteristická rovnice

$(\lambda + 3)^2 = 0$, tj. $\lambda_{1,2} = -3$ – dvojnásobný kořen ch. r.

a tedy fundamentální systém je:

$y_1(x) = e^{-3x}$, $y_2(x) = x\, e^{-3x}$

a obecné řešení

$y_H = (c_1 + c_2 x)\, e^{-3x}$, $c_1, c_2 \in R$, $x \in R$

d) a jeden příklad navíc – místo a) nešlo by

$y'' + 2y' - 3y = 0$

(omlouvám se za chybu „lišku" – tím v příkladech chyběl případ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$)

ch. r.: $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

$(\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0$ $\quad \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$

a fundamentální systém je:

$y_1(x) = e^{x}$, $y_2(x) = e^{-3x}$

a obecné řešení

$y_H(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}$, $x \in R$, $c_1, c_2 \in R$

(2) Máme řešit počáteční (Cauchyho) úlohu

$$y'' - y' - 2y = e^{2x}, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 1$$

(a užít variaci konstant)

a) řešení homogenní rovnice

$y'' - y' - 2y = 0$: ch.r. $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, řešení $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$

a $y_H(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}, \; x \in R, c_1, c_2 \in R$

b) partikulární řešení rovnice s pravou stranou:

(i) zkusme i odhad (ať víme, co „má vyjít")

$f(x) = e^{2x} \rightarrow$ odhad $y_p(x) = x \cdot A e^{2x}$, neboť $\Lambda = 2$ je jednonásobný kořen ch.r., tedy ve vzorci pro odhad partikulárního řešení je $k = 1$

(„Vzorec"-opakování:

$f(x) = e^{ax} \left(p(x) \cos bx + q(x) \sin bx \right)$, kde
$\Lambda = a + bi$ je k-násobný kořen ch.r. ($k = 0, 1, 2$)
a $p(x), q(x)$ polynomy, pak odhad $y_p(x)$:

$y_p(x) = x^k e^{ax} \left(P(x) \cos bx + Q(x) \sin bx \right)$, kde
$\text{st}\, P(x) = \text{st}\, Q(x) = \max\left(\text{st}\, p(x), \text{st}\, q(x)\right)$
($P(x)$ a $Q(x)$ jsou „hledané" polynomy, tedy „počítáme" jejich koeficienty – těmi jsou polynomy určeny)

Tedy, řešení $y_p(x)$ odhodujeme ve tvaru $y_p(x) = Axe^{2x}$, a hledáme jen" A - a to tak, aby byla splněna daná rovnice, tj: aby platilo:

$$\underline{(Axe^{2x})'' - (Axe^{2x})' - 2Ae^{2x} \cdot x = e^{2x} \quad (*)}$$

Pomocný výpočet:

$$y_p'(x) = A\,(xe^{2x})' = A\,(e^{2x} + 2xe^{2x}) = A\,(2x+1)e^{2x}$$

$$y_p''(x) = A\left[2e^{2x} + (2x+1)\cdot 2e^{2x}\right] = A\,4(x+1)\cdot e^{2x}$$

Po dosazení do $(*)$ dostaneme (krátíme e^{2x}):

$$A\Big(4x+4 - (1+2x) - 2x\Big) = 1 \quad, \text{tj.}$$

$$3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

a $\quad y_p(x) = \frac{1}{3}xe^{2x}, \quad x \in R$

a obecné řešení rovnice nehomogenní:

$$\underline{y_{ob}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{2x} \quad, c_1, c_2 \in R, \; x \in R}$$

<u>Řešení počáteční úlohy:</u> ? c_1, c_2 tak, aby platilo:

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &: \quad c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) = 1 &: \quad -c_1 + 2c_2 + \frac{1}{3} = 1 \end{aligned} \Bigg\} \Leftrightarrow \begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ -c_1 + 2c_2 &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

a odtud: $c_2 = \frac{5}{9}$, $c_1 = \frac{4}{9}$, tedy,

$$\underline{y_{poč}(x) = \frac{4}{9}e^{-x} + \frac{5}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{2x}, \quad x \in R}$$

a nyní metoda variace konstant (pro řešení rovnice nehomogenní)

Řešení hledáme ve tvaru $y(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x)$,
kde $y_1(x), y_2(x)$ je fundamentální systém řešení dané rovnice,
tj. „zde": $$y(x) = c_1(x)\, e^{-x} + c_2(x)\, e^{2x}$$

a pro $c_1'(x), c_2'(x)$ dostaneme soustavu rovnic:

(1) $c_1'(x)\, e^{-x} + c_2'(x)\, e^{2x} = 0$

(2) $-c_1'(x)\, e^{-x} + 2 c_2'(x)\, e^{2x} = e^{2x}$

(obecně: $c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0$, $c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = f(x)$)

a řešení ((1)+(2)): $c_2'(x) = +\frac{1}{3} \Rightarrow c_2(x) = \frac{1}{3}x + \tilde{c}_2$

a z (1): $c_1'(x) = -c_2'(x)\, e^{2x} \cdot e^{x} = -\frac{1}{3} e^{3x} \Rightarrow c_1(x) = -\frac{e^{3x}}{9} + \tilde{c}_1$

(chceme-li jen partikulární řešení, můžeme vzít $c_1 = c_2 = 0$)

a pak řešení nehomogenní rovnice je

$$y(x) = \left(-\frac{1}{9} e^{3x} + \tilde{c}_1\right) e^{-x} + \left(\frac{1}{3}x + \tilde{c}_2\right) e^{2x},$$ tedy (po úpravě)

$$y(x) = \underbrace{\tilde{c}_1 e^{-x} + \tilde{c}_2 e^{2x} - \frac{1}{9} e^{2x}}_{y_H(x)} + \underbrace{\frac{1}{3} x e^{2x}}_{y_P(x)}$$

zde můžeme „vzít" $c_2 = \tilde{c}_2 - \frac{1}{9}$ – opět jsou to všechna reálná čísla, $\tilde{c}_1 = c_1$

a dostaneme „správný" tvar řešení

$$y_{OB}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{3} x e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in R,\ x \in R.$$

(3) $y'' + y' = 4x - 2\sin x$; $y(0)=0,\ y'(0)=0$

(partikulární řešení máme najít „odhadem“)

a) homogenní rovnice $\quad y''+y' = 0$, ch. r. $\lambda^2+\lambda=0$

a $\lambda_1=0, \lambda_2=-1$

tj. $\quad y_H(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$, $c_1, c_2 \in R,\ x \in R$

(fund. systém : $y_1(x) = e^{0x} = 1$, $y_2(x) = e^{-x}$)

b) partikulární řešení – odhadem :

podíváme-li "se na vzorec" pro odhad partikulárního "řešení (v minulém příkladu str. 3) – pak pravá strana" $f(x) = 4x - 2\sin x$ použití vzorce neumožní –

– ale když vezmeme

$f_1(x) = 4x \quad$ a $\quad f_2(x) = +2\sin x$

pak pro $f_1(x)$ i $f_2(x)$ odhad udělat lze , a řešení $y_p(x)$ rovnice s pravou stranou $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ je

pak $y_p(x) = y_{p_1}(x) - y_{p_2}(x)$ (kde $y_{p_1}(x)$ je řešení „pro" $f_1(x)$ a $y_{p_2}(x)$ je řešení „pro" $f_2(x)$) díky "linearitě" rovnice – označíme-li $D(y) = y''+y'$,

pak $\underline{D(y_{p_1}-y_{p_2})} = D(y_{p_1}) - D(y_{p_2}) = f_1(x) - f_2(x) = \underline{f(x)}$!

Takto tedy lze také „využít" návod pro odhad partikulárního řešení. – A teď provedení :

(i) <u>Odhad $y_p(x)$ pro $f_1(x) = 4x$:</u>

(dle „vzorce") – zde $\Lambda = 0 + 0i$ je jednonásobný kořen ch.r. $\Rightarrow$
$\Rightarrow k = 1$ a

$$\underline{y_{p_1}(x) = x(Ax+B)\ (= Ax^2+Bx)}$$ (neboť $f_1(x)$ je polynom 1. stupně)

a dosazením do rovnice :

$$y'' + y' = 4x$$

$$2A + (2Ax+B) = 4x,$$ tj. (srovnáním koeficientů polynomů)

$$2A = 4 \Rightarrow A = 2$$

$$2A + B = 0 \Rightarrow B = -4$$ a tedy

$$\underline{y_{p_1}(x) = 2x^2 - 4x}$$

(ii) <u>Odhad $y_{p_2}(x)$ pro $f_2(x) = 2\sin x$:</u>

(dle „vzorce" pro odhad) – $\Lambda = i$ – není kořen ch.r. $\Rightarrow k = 0$

a $y_{p_2}(x) = A\sin x + B\cos x$, a dosazením do rovnice :

$$\left(y_{p_2}''(x) = (A\cos x - B\sin x)' = -A\sin x - B\cos x \right)$$

$$-A\sin x - B\cos x + A\cos x - B\sin x = +2\sin x$$

u $\sin x$ a $\cos x$ srovnáme koeficienty („musí" se rovnat pro $\forall x \in R$)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{u } \sin x: & -A - B = 2 \\ \text{u } \cos x: & A - B = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow A = B = -1,$$

tj. $\underline{y_{p_2}(x) = -(\sin x + \cos x)}$

(iii) a pak $\underline{y_p(x) = 2x^2 - 4x + \sin x + \cos x}$ a

$$\underline{y_{ob}(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + 2x^2 - 4x + \sin x + \cos x,}\quad x \in R$$

$C_1, C_2 \in R$

a řešení počáteční úlohy:

$y(0)=0$: $c_1 + c_2 + 1 = 0 \Rightarrow c_1 = 2$

$-c_2 - 4 + 1 = 0 \Rightarrow c_2 = -3$

a $y_{poč}(x) = 2 - 3e^{-x} + 2x^2 - 4x + \sin x + \cos x, \ x \in R$

④ $y'' - 4y' + 13y = e^{-x} \sin 2x$

a) obecné řešení homogenní rovnice už máme z příkladu 1b,

$$y_H(x) = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x), \quad c_1, c_2 \in R, x \in R$$

(řešení ch.r. je $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$)

b) partikulární řešení odhadem (v „reálném" oboru)

dle „vzorce pro odhad": $\Lambda = -1 + 2i$ není kořen ch.r. $\Rightarrow k=0$,

dále $p(x) = 0$, $q(x) = 1 \Rightarrow \text{st} P(x) = \text{st} Q(x) = 0$ (konstanty)

odhad: $y_p(x) = e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$, ? A, B

A teď „práce" s derivováním a dosazením do rovnice,

a pak ještě řešení soustavy – (s komplexní exponenciálou

je práce dost jednodušší – napíšu vám zvláštní

„cvičení", kde si zopakujeme komplexní čísla a zavedeme

komplexní exponenciálu a naučíme si ji použít při řešení

dif. rovnic lineárních 2. řádu (bude zase „na dubu").

a „počty“ (a ještě – omluva, měla jsem pro vás „lepší“ příklad, ale nedala jsem v zadání jen „horší“, tak se omlouvám za nepěkné konstanty)

$$y_p(x) = e^{-x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right), \text{ pak}$$

$$y_p'(x) = -e^{-x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) + e^{-x}\left(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right) =$$

$$= -e^{-x}\left[(A-2B)\cos 2x + (2A+B)\sin 2x\right]$$

$$y''(x) = e^{-x}\left[(A-2B)\cos 2x + (2A+B)\sin 2x\right] - e^{-x}\left[-2(A-2B)\sin 2x + 2(2A+B)\cos 2x\right] =$$

$$= e^{-x}\left[(-3A-4B)\cos 2x + (4A-3B)\sin 2x\right]$$

a po dosazení do rovnice (a zkrácení „e^{-x}“):

$$\cos 2x\left(-3A-4B+4A-8B+13A\right) +$$

$$+ \sin 2x\left(4A-3B+8A+4B+13B\right) = \sin 2x, \text{ tj.}$$

u $\cos 2x$: $14A - 12B = 0$

u $\sin 2x$: $12A + 14B = 1$

a mně „vyšlo“ (?) $A = \frac{6}{170}$, $B = \frac{7}{170}$

(za což se opět omlouvám)

Tedy pak

$$y_p(x) = e^{-x}\left(\frac{6}{170}\cos 2x + \frac{7}{170}\sin 2x\right) \quad \text{a}$$

$$\left(= \frac{e^{-x}}{170}\left(6\cos 2x + 7\sin 2x\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y_{\text{oř}}(x) = \left(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x\right) e^{2x} + \frac{e^{-x}}{170}\left(6\cos 2x + 7\sin 2x\right)$$

$x \in R,\ c_1, c_2 \in R$

a řešení počáteční úlohy:

$y(0) = 0 \quad : \quad c_1 + \frac{6}{170} = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{6}{170}$

$y'(0) = 1 \quad : \quad 2c_1 + 3c_2 - \frac{6}{170} + \frac{14}{170} = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{58}{170}$ (?)

(překontrolujte, ale nemusíte")

Tedy („slavnostní" závěr příkladu – jistě jsme se nadřeli na ty koeficienty):

$$y_{\text{př}}(x) = \frac{1}{170}\left[\left(-6\cos 3x + 58\sin 3x\right) e^{2x} + e^{-x}\left(6\cos 2x + 7\sin 2x\right)\right],$$

$x \in R$